ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

5.1. Введение

В предыдущих разделах были рассмотрены объекты предметных областей (множеств), относительно которых можно однозначно сказать, являются ли объекты элементами рассматриваемого "мира" или нет. Эти множества имеют "четкие" границы, отделяющие объекты, принадлежащие множеству, от других объектов. Такие множества назовем четкими - двузначными ("да" и " нет" или "истина" или "ложь") относительно принадлежности объекта данному множеству. Отношения между объектами четких множеств описываются четкой, т.е. двузначной логикой.

Однако в мире очень многое не делится только на черное и белое. Например, пусть человек классифицирует предметы по цвету (розовый, алый, красный, бордовый), относя их в один класс одноцветных, с его точки зрения, предметов. Ясно, что некоторые предметы могут быть отнесены к множеству данного цвета очень приблизительно, и, как правило, степень принадлежности предметов данному множеству определяется субъективно. Разумеется, что границы такого множества как бы размыты, или расплывчаты. Поэтому и сами множества объектов, обладающие нечеткими свойствами, называются *нечеткими или расплывчатыми*.

Очевидно, что и высказывания о принадлежности или непринадлежности объекта расплывчатому множеству является приблизительно верным или приблизительно ложным. В этом случае имеется возможность использовать так называемую нечеткую логику, значения истинности которой могут быть любыми в пределах от полной истины (1) до полной лжи (0).

Основоположник теории нечетких множеств и систем Л.А. Заде [14] впервые ввел понятие "*нечеткое множество*", использовал термин "*функция принадлежности"* и показал, что обычные количественные или точные методы анализа, хорошо разработанные для механических систем, не пригодны для исследования систем, степень сложности которых сравнима с гуманистическими, так как чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные суждения о ее поведении. Основополагающим принципом нечеткой математики является так называемый принцип несовместимости: "высокая точность несовместима с большой сложностью системы".

Жертвуя точностью перед сложностью, вводят так называемые *лингвистические переменные*, т.е. переменные, значениями которых являются не числа, а слова или предложения на естественном языке.

Подход с позиции теории нечетких множеств опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а словесные описания, т.е. элементы нечетких множеств или классов, для которых переход от "принадлежности" классу или "непринадлежности" не скачкообразен, а непрерывен. В дополнение к количественным характеристикам объектов использование словесных описаний позволяет анализировать достаточно сложные системы, недоступные формальному математическому анализу.

5.2. Основные понятия

Будем обозначать фигурными скобками {} множества, а квадратные [ ] и круглые () используем для обозначения замкнутого и открытого интервала действительных чисел.
Пусть X- произвольное непустое множество. Множество
$\tilde{A} = \{< \mu_A(x)|x >, x \in X\}$
называется нечетким множеством в множестве X, если каждый элемент $\tilde{A}$ множества есть пара, на первом месте которой стоит значение функции $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$,называемой *функцией принадлежности* элементов из X множеству $\tilde{A}$, а на втором - элемент $x \in X$, для которого определена эта функция. Другими словами, при задании множества $\tilde{A}$ каждому $x \in X$ приписывается число $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$, определяющее степень принадлежности этого элемента множеству $\tilde{A}$. Примем, что в множество $\tilde{A}$ не включаются элементы $< \mu_A(x)|x >$, для которых $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$.
Здесь и в дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, знак ~ над нечетким множеством в записи функции принадлежности будем опускать.
Носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ называется подмножество A множества X, для которого значения функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$больше нуля. Очевидно, что само множество X можно формально рассматривать как нечеткое в себе, если каждому $x \in X$приписать $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

Нечеткое множество $\tilde{A}$ в X называется пустым $\emptyset$, если для всех $x \in X$, величина $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$. Ясно, что носитель пустого расплывчатого множества также пустое множество.

Пример 5.1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.Множества
$\tilde{A} = \{< 0.2|x_3 >, < 0.4|x_6 >, < 0.1|x_7 >, < 1|x_8 >\}$ и $\tilde{B} = \{< 1|x_2 >, < 1|x_3 >, < 1|x_6 >\}$
являются нечеткими в множестве X. Носителем множества $\tilde{A}$ служит множество $A = \{x_3, x_6, x_7, x_8\}$, а носителем множества $\tilde{B}$ является $B = \{x_2, x_3, x_6\}$. Отметим, что множество B фактически не расплывчато в X, так как значения функции принадлежности для всех элементов его носителя равны единице. Исходя из этого, любое нечеткое подмножество множества X может быть рассмотрено как нечеткое множество частного вида.
Пусть X={“*Волга”, “Запорожец”, “Москвич”, “Жигули*”) - множество автомобилей. Тогда нечеткое множество $\tilde{A}$ - "хорошая машина" может быть определено, с некоторой точки зрения, как Л$\tilde{A} = \{< 1|\textit{Волга} >, < 0.4|\textit{Запорожец} >, < 0.6|\text{"Москвич"} >, < 0.8|\text{"Жигули"} >\}$. Ясно, что функция принадлежности для каждого расплывчатого множества, вообще говоря, определяется субъективно.
Фундаментальными понятиями в теории нечетких множеств являются понятия
лингвистической и нечеткой переменных. Нечеткой переменной называется тройка

$$< \alpha, X, \tilde{C} >,$$

где α - наименование нечеткой переменной; X={x} - область ее определения (базовое множество); $\tilde{C}$ ={$< \mu_c|x >$}, $x \in X$, - нечеткое множество в X, определяющее ограничения на возможные значения нечеткой переменной α.
Лингвистической переменной называется тройка

$$< \beta, T, X >,$$

где р наименование лингвистической переменной; T - множество ее значений (или термов), определяющих наименования нечетких переменных, область определения каждой из которых является множество X. Множество T называется базовым терм-множеством лингвистической переменной β.

Пример. Пусть оценивается стоимость выпускаемой продукции с помощью понятий *"малая", "средняя", "высокая"*. Максимальная стоимость продукции 5000 руб. Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной <*Стоимость*, T, [0;5000]>, где T= {"*малая", "средняя", "высокая*"}. Значения лингвистической переменной описываются нечетким переменными. Например, значение "малая" описывается нечеткой переменной <*малая*,[0;5000], $\tilde{C}$>, где нечеткое множество $\tilde{C}$ может быть таким:
$\tilde{C} = \{< 1|0, >, < 0.8|200 >, < 0.6|1000 >, < 0.2|2000 >\}$. Примерный вид непрерывных

функций принадлежности нечетких множеств, описывающих нечеткие переменные *"малая", "средняя", "высокая"* приведена на рис. 5.1.

Рис. 5.1

Таким образом, лингвистической называется переменная, заданная на некоторой количественной шкале (базовой) и принимающая значения, являющиеся словами и словосочетаниями естественного языка. Значения лингвистической переменной описываются нечеткими переменными.

Лингвистические переменные и их значения служат для качественного, словесного описания некоторой количественной величины. Поэтому важно, что любая лингвистическая переменная, как и все ее значения, связана с конкретной количественной шкалой. Эта шкала по аналогии с базовым множеством иногда называют базовой шкалой.

5.3. Нечеткие высказывания и операции над ними

Нечетким высказыванием называется предложение, относительно которого можно судить о его истинности или ложности в настоящий момент. Следовательно, степень истинности или степень ложности нечеткого высказывания принимает значения из интервала [0,1], причем 0 и 1 являются предельными значениями степени истинности и совпадают с понятиями истины и лжи для четких высказываний.

Нечеткое высказывание, имеющее значение степени истинности, равное 0.5, назовем *индифферентностью*, так как оно истинно в той же мере, как ложно.

Примеры нечетких высказываний: "2 - маленькое число", "Студент Иванов не опаздывает на занятия", "*Москвич* -хороший автомобиль". Автомобиль "Москвич" принадлежит расплывчатому множеству $\tilde{C}$ в X, где X - множество автомобилей, а $\tilde{C}$ - множество хороших автомобилей.

Истинность нечетких высказываний, как это уже отмечалось, является субъективной характеристикой. Поэтому степень истинности первого из приведенных в примере высказываний можно положить равной 0.7, второго - 0.3, третьего -0.1.

Поскольку в нечеткой логике степень истинности каждого высказывания рассматривается безотносительно к его смыслу, то нечеткое высказывание и его степень истинности будем обозначать одной и той же прописной буквой с тильдой.

Простые высказывания, связанные логическими операциями образуют сложное высказывание.

Степень истинности отрицания нечеткого высказывания определяется выражением

$$\neg\tilde{A}=1-\tilde{A} \quad (5.1)$$

Отсюда ясно, что степень ложности $\neg\tilde{A}$ совпадает со степенью истинности $\tilde{A}$.

Степень истинности конъюнкции высказываний:

$$\tilde{A}\wedge\tilde{B}=\min(\tilde{A},\tilde{B}). \quad (5.2)$$

Степень истинности высказывания $\tilde{A}\wedge\tilde{B}$ совпадает со степенью истинности наименее истинного высказывания. Степень истинности дизъюнкции высказываний:

$$\tilde{A}\vee\tilde{B}=\max(\tilde{A},\tilde{B}) \quad (5.3)$$

Степень истинности высказывания $\tilde{A}\vee\tilde{B}$ совпадает со степенью истинности более истинного высказывания.

Степень истинности импликации высказываний:

$$\tilde{A}\rightarrow\tilde{B}=\max(1-\tilde{A},\tilde{B}) \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что степень истинности импликации не меньше степени истинности ее посылки или степени истинности ее следствия. Кроме того, степень истинности импликации тем выше, чем меньше степень истинности посылки или выше степень истинности следствия.

Степень истинности эквивалентности высказываний:

$$\tilde{A}\leftrightarrow\tilde{B}=\min\left(\left(\max\left(1-\tilde{A},\tilde{B}\right),\left(\max\left(1-\tilde{B}\right),\tilde{A}\right)\right)\right). \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что степень истинности эквивалентности нечетких высказываний совпадает со степенью истинности менее истинной из импликаций $\tilde{A}\rightarrow\tilde{B}$ и $\tilde{B}\rightarrow\tilde{A}$. Если степени истинности нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ одинаковы, то степень истинности высказывания $\tilde{A}\leftrightarrow\tilde{B}$ лежит в интервале [0.5,1] и имеет значение 0.5 при $\tilde{A}=\tilde{B}=0.5$ и значение 1 при $\tilde{A}=\tilde{B}=1$ или $\tilde{A}=\tilde{B}=0$. При разных значениях степеней истинности высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ степень истинности высказывания $\tilde{A}\leftrightarrow\tilde{B}$ может принимать значения от 0 до 1, причем значение 0 при $\tilde{A}$=0, $\tilde{B}$ =1 или $\tilde{A}$=1, $\tilde{B}$=0.

Два высказывания называются нечетко близкими, если степень истинности высказывания больше или равна 0.5. В случае равенства 0.5 их называют нечетко *взаимно индифферентными*.

Выражения (5.1)—(5.5) в случаях, когда степень истинности высказываний принимает только два значения 0 или 1, определяют соответствующие логические операции над четкими высказываниями.

Пример 5.2. Найти степень истинности сложного нечеткого высказывания $\tilde{D}=(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B}\vee\neg\tilde{A}\wedge\tilde{B})\rightarrow\neg\left(\tilde{A}\wedge\tilde{C}\right)$, если $\tilde{A}$=0.7, $\tilde{B}$=0.4, $\tilde{C}$=0.9. Используя (5.1) - (5.5), получим

$$\tilde{D}=\max\left((1-(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B}\vee\neg\tilde{A}\wedge\tilde{B})),\neg\left(\tilde{A}\wedge\tilde{C}\right)\right)=$$

$$=\max\left(\left(1-\max\left(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B},\neg\tilde{A}\wedge\tilde{B}\right)\right),1-\left(\tilde{A}\wedge\tilde{C}\right)\right)=$$

$$=\max\left(\left(1-\max\left(\min\left(\tilde{A},1-\tilde{B}\right),\min\left(1-\tilde{A},\tilde{B}\right)\right)\right),1-\min\left(\tilde{A},\tilde{C}\right)\right)=$$

$$=\max\left(\left(1-\max\left(\min\left(0.7,0.6\right),\min\left(0.3,0.4\right)\right)\right),1-\min\left(0.7,0.9\right)\right)=$$

$$=\max\left(\left(1-\max\left(0.6,0.3\right)\right),0.3\right)=\max\left(0,4,0.3\right)=0.4$$

5.4. Нечеткие логические формулы

Под *нечеткой высказывательной переменной* x, будем понимать нечеткое высказывание, степень истинности которого может принимать значения из интервала [0,1].

Нечеткой логической формулой $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n),(n\geq 1)$ называется:

• любая нечеткая переменная или константа из [0,1];

• выражение $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$, полученное из нечетких логических формул $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ применением к ним любого конечного числа логических операций.

Для задания нечетких логических формул используются аналитические выражения, так как использование здесь таблиц степеней истинности невозможно из за их бесконечности.

Рассмотренные в предыдущем разделе нечеткие сложные высказывания являются нечеткими логическими формулами, если образующие их простые нечеткие высказывания рассматривать как нечеткие высказывательные переменные.

Для любых двух нечетких формул $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$, которые определены на наборах нечетких высказывательных переменных $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n$,выводится фундаментальное понятие степени их равносильности, которое является обобщением понятия равносильности четких формул.

Степень равносильности нечетких формул $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ обозначается $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$ и определяется выражением

$$\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\bigcap_{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n}\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)\leftrightarrow\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n) \qquad (5.6)$$

где знак "$\leftrightarrow$" - операция эквивалентности, определяемая по (5.5); $\bigcap$ - операция конъюнкции, определяемая по (5.2), которая берется для всех возможных наборов степеней истинности нечетких переменных $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n$. Если степень равносильности нечетких формул $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ на всех определенных наборах степеней истинности нечетких высказывательных переменных больше или равна 0.5, то такие формулы будем называть *нечетко близкими* на этих наборах и обозначать $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)\approx\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$. В случае, когда $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$ меньше или равна 0.5, будем считать, что формулы $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ не являются нечетко близкими на указанных наборах, и это обозначается

$$\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)\neq\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$$

Если $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=0.5$, то формулы $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$ одновременно являются и не являются нечетко близкими. В этом случае их называют индифферентными и обозначают $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)-\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$.

Важно подчеркнуть, что нечеткие формулы, имеющие на одних и тех же наборах одинаковые степени истинности, не равносильны, а имеют некоторую степень равносильности, большую или равную 0.5, но всегда меньшую или равную единице. Поэтому для одних и тех же формул можно говорить о степени их неравносильности, которая определяется как $1-\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$.

Пример 5.3. Определим степень равносильности формул $\tilde{A}_1(\tilde{x},\tilde{y})=\neg\tilde{x}\rightarrow\tilde{y}$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{x}\wedge\neg\tilde{y}$ при условии, что $\tilde{x}$ принимает значения степеней истинности из множества дискретных значений {0.8, 0.6, 0.7}, а $\tilde{y}$ - из множества {0.3, 0.4}. Подставим в (5.6) заданные формулы, тогда

$$\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\bigcap_{\tilde{x},\tilde{y}}\left((\neg\tilde{x}\rightarrow\tilde{y})\leftrightarrow(\tilde{x}\wedge\neg\tilde{y})\right)$$

Выбирая все возможные наборы степеней истинности переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, получим

$$\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\big((\neg 0.8\rightarrow 0.3)\leftrightarrow(0.8\wedge\neg 0.3)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.8\rightarrow 0.4)\leftrightarrow(0.8\wedge\neg 0.4)\big)\wedge\big((\neg 0.6\rightarrow 0.3)\leftrightarrow(0.6\wedge\neg 0.3)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.6\rightarrow 0.4)\leftrightarrow(0.6\wedge\neg 0.4)\big)\wedge\big((\neg 0.7\rightarrow 0.3)\leftrightarrow(0.7\wedge\neg 0.3)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.7\rightarrow 0.4)\leftrightarrow(0.7\wedge\neg 0.4)\big)=(0.8\leftrightarrow 0.7)\wedge(0.8\leftrightarrow 0.6)\wedge(0.6\leftrightarrow 0.6)\wedge$$
$$(0.7\leftrightarrow 0.7)\wedge(0.7\leftrightarrow 0.6)=0.7\wedge 0.6\wedge 0.6\wedge 0.7\wedge 0.6=0.6$$

Можно утверждать, что формулы $\tilde{A}_1(\tilde{x},\tilde{y})$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x},\tilde{y})$ нечетко близки при заданных значениях степеней истинности переменных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$.

Если для той же задачи положить, что $\tilde{x}$ принимает значения степеней истинности из множества {0.2, 0.4}, а $\tilde{y}$ - из множества {0.6, 0.7,0.8}, то будем иметь

$$\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\big((\neg 0.2\rightarrow 0.6)\leftrightarrow(0.2\wedge\neg 0.6)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.2\rightarrow 0.7)\leftrightarrow(0.2\wedge\neg 0.7)\big)\wedge\big((\neg 0.2\rightarrow 0.8)\leftrightarrow(0.2\wedge\neg 0.8)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.4\rightarrow 0.6)\leftrightarrow(0.4\wedge\neg 0.6)\big)\wedge\big((\neg 0.4\rightarrow 0.7)\leftrightarrow(0.4\wedge\neg 0.7)\big)\wedge$$
$$\big((\neg 0.4\rightarrow 0.8)\leftrightarrow(0.4\wedge\neg 0.8)\big)=(0.6\leftrightarrow 0.2)\wedge(0.7\leftrightarrow 0.2)\wedge(0.8\leftrightarrow 0.2)\wedge$$
$$(0.6\leftrightarrow 0.4)\wedge(0.7\leftrightarrow 0.3)\wedge(0.8\leftrightarrow 0.2)=0.4\wedge 0.3\wedge 0.2\wedge 0.4\wedge 0.3\wedge 0.2=0.2$$

Следовательно, формулы $\tilde{A}_1(\tilde{x},\tilde{y})$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x},\tilde{y})$ в этом случае не являются нечетко близкими.

Рассмотрим понятия *нечетко истинных* и *нечетко ложных формул*. Пусть $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ - формула. Если при всех определенных значениях степеней истинности нечетких переменных $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n$ значение степени истинности нечеткой логической формулы $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ больше или равно 0.5, то такую формулу назовем нечетко истинной на этих наборах и обозначим ее $\tilde{И}$.

Если на этих же наборах степень истинности формулы $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ меньше или равна 0.5, такую формулу будем считать нечетко ложной и обозначать $\tilde{Л}$.

Пусть $\tilde{И}_1$, $\tilde{И}_2,\tilde{Л}_1,\tilde{Л}_2$ - соответственно некоторые нечетко истинные и нечетко ложные формулы на одних и тех же наборах переменных. Тогда справедливы соотношения:

$$\tilde{И}_1\vee\tilde{И}_2\approx\tilde{И}_1\approx\tilde{И}_2\approx\tilde{И}_1\wedge\tilde{И}_2;$$
$$\tilde{Л}_1\vee\tilde{Л}_2\approx\tilde{Л}_1\approx\tilde{Л}_2\approx\tilde{Л}_1\wedge\tilde{Л}_2;$$
$$\tilde{И}_1\wedge\tilde{Л}_1\approx\tilde{Л}_1;$$
$$\tilde{И}_1\vee\tilde{Л}_1\approx\tilde{И}_1$$

Если $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ - произвольные нечеткие логические формулы, то справедливы выражения:

$$\tilde{A}_1\vee\tilde{И}_1\approx\tilde{A}_2\vee\tilde{И}_2;$$
$$\tilde{A}_1\wedge\tilde{Л}_1\approx\tilde{A}_2\wedge\tilde{Л}_2$$

где $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\tilde{И}_1,\tilde{И}_2,\tilde{Л}_1,\tilde{Л}_2$ определены на одних и тех же наборах переменных.

Примерами нечетко истинных и нечетко ложных формул являются

$$\tilde{Л}=\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}$$
$$\tilde{И}=\tilde{x}\vee\neg\tilde{x} \qquad (5.7)$$

Из определений операций $\neg$, $\vee$ и $\wedge$ имеем

$$\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}\le 0.5;$$
$$\tilde{x}\vee\neg\tilde{x}\ge 0.5$$

при любых значениях степени истинности $\tilde{x}$. Следовательно, из определений нечетко истинных и нечетко ложных формул вытекает справедливость (5.7)

Свойства (5.7) позволяют определить класс нечетко близких формул, не имеющих аналогов в четкой логике.

Если нечеткая формула $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ представима в виде $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)=\tilde{f}_1\wedge\left(\tilde{x}_i\wedge\neg\tilde{x}_i\right)$, а формула $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)=\tilde{f}_2\wedge\left(\tilde{x}_j\wedge\neg\tilde{x}_j\right)$, где $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ - некоторые нечеткие формулы от нечетких переменных $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n$, а $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$ - нечеткие переменные из набора $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n$,то можно утверждать, что $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)\approx\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$.

Действительно, на основании (5.7) и (5.2) имеем

$\tilde{f}_1\wedge\left(\tilde{x}_i\wedge\neg\tilde{x}_i\right)\le 0.5;\ \tilde{f}_2\wedge\left(\tilde{x}_i\wedge\neg\tilde{x}_i\right)\le 0.5$, а учитывая (5.5) и (5.6), получаем.

Аналогично, если $\tilde{A}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$ представима в виде $\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)=\tilde{g}_1\vee\left(\tilde{x}_i\vee\neg\tilde{x}_i\right)$ и $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)=\tilde{g}_2\vee\left(\tilde{x}_j\vee\neg\tilde{x}_j\right)$, где $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ - некоторые нечеткие формулы от переменных $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n$, и $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$ - нечеткие переменные из этого же набора, то можно утверждать, что

$\tilde{A}_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)\approx\tilde{A}_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)$.

Для установления нечеткой близости нечетких логических формул могут быть использованы следующие соотношения, которые справедливы для любых наборов значений степеней истинности нечетких переменных.

Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, и $\tilde{z}$ - нечеткие логические формулы, Тогда

$\neg\left(\neg\tilde{x}\right)\approx\tilde{x}$; (5.8)

$\tilde{x}\wedge\tilde{x}\approx\tilde{x}$; (5.9)

$\tilde{x}\vee\tilde{x}\approx\tilde{x}$;

$\tilde{x}\wedge\tilde{y}\approx\tilde{y}\wedge\tilde{x}$, (5.10)

$\tilde{x}\vee\tilde{y}\approx\tilde{y}\vee\tilde{x}$;

$\tilde{x}\wedge\left(\tilde{y}\wedge\tilde{z}\right)\approx\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\wedge\tilde{z}\approx\tilde{x}\wedge\tilde{y}\wedge\tilde{z}$; (5.11)

$\tilde{x}\vee\left(\tilde{y}\vee\tilde{z}\right)\approx\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\vee\tilde{z}\approx\tilde{x}\vee\tilde{y}\vee\tilde{z}$;

$\tilde{x}\wedge\left(\tilde{y}\vee\tilde{z}\right)\approx\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\vee\left(\tilde{x}\wedge\tilde{z}\right)$; (5.12)

$\tilde{x}\vee\left(\tilde{y}\vee\tilde{z}\right)\approx\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\vee\left(\tilde{x}\vee\tilde{z}\right)$;

$\neg\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\approx\neg\tilde{x}\vee\neg\tilde{y}$; (5.13)

$\neg\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\approx\neg\tilde{x}\wedge\neg\tilde{y}$;

$\tilde{x}\vee\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\approx\tilde{x}$; (5.14)

$\tilde{x}\vee\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\approx\tilde{x}$;

$\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\vee\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\approx\tilde{x}\vee\tilde{y}$; (5.15)

$\left(\tilde{x}\vee\tilde{y}\right)\wedge\left(\tilde{x}\wedge\tilde{y}\right)\approx\tilde{x}\wedge\tilde{y}$; (5.16)

$\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}\approx\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y}$;

$\tilde{x}\vee\neg\tilde{x}\approx\tilde{y}\vee\neg\tilde{y}$; (5.17)

$\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}\wedge\tilde{y}\approx\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y}\wedge\tilde{x}$;

$\tilde{x}\vee\neg\tilde{x}\vee\tilde{y}\approx\tilde{y}\vee\neg\tilde{y}\vee\tilde{x}$; (5.18)

$\left(\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}\right)\wedge\left(\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y}\right)\approx\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x}$;

$$(\tilde{x}\vee\neg\tilde{x})\vee(\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y})\approx\tilde{x}\vee\neg\tilde{x}; \qquad (5.19)$$

$$\tilde{x}\to\tilde{y}\approx\neg\tilde{y}\to\neg\tilde{x}, \qquad (5.20)$$

$$\neg\tilde{x}\to\tilde{y}\approx\neg\tilde{y}\to\tilde{x}\approx\tilde{x}\vee\tilde{y}; \qquad (5.21)$$

$$\tilde{x}\to(\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\approx\to(\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\to\tilde{y}; \qquad (5.22)$$

$$(\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\to(\tilde{y}\vee\tilde{z})\approx(\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y})\to\tilde{x}\vee\tilde{z} \qquad (5.23)$$

Кроме того, имеют место следующие свойства. Пусть C -константа, причем 0<C<1. Тогда

$$\tilde{x}\wedge 0\approx 0;$$
$$\tilde{x}\wedge 1\approx\tilde{x};$$
$$\tilde{x}\vee 0\approx\tilde{x};$$
$$\tilde{x}\vee 1\approx 1. \qquad (5.24)$$

$$\tilde{x}\wedge C\approx\begin{cases}\tilde{x}, \text{ если } \tilde{x}\le C;\\ C, \text{ если } \tilde{x}\ge C;\end{cases}$$

$$\tilde{x}\vee C\approx\begin{cases}C, \text{ если } \tilde{x}\le C;\\ \tilde{x}, \text{ если } \tilde{x}\ge C.\end{cases} \qquad (5.25)$$

Если число нечетких высказывательных переменных велико, то перебор всех возможных соотношений между степенями их истинности для установления нечеткой близости логических формул становится затруднительным. В этих случаях для доказательства нечеткой близости используются выражения (5.7)^(5.25) или вытекающие из них.

Пример 5.5. Доказать

$$\neg\left(\neg\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\neg\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\vee(\neg\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\right)\right)\approx(\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y})\vee\neg\tilde{z}.$$

Используем (5.13)

$$\neg\left(\neg\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\neg\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\vee(\neg\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\right)\right)\approx\neg\left(\neg\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee(\neg\tilde{y}\wedge\tilde{z})\vee(\tilde{y}\wedge\tilde{z})\right)$$

Применим еще раз (5.13)

$$\neg\left(\neg\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee\tilde{x}\wedge\tilde{z}\vee(\neg\tilde{y}\wedge\tilde{z})\wedge(\tilde{y}\wedge\tilde{z})\right)\approx(\tilde{x}\vee\neg\tilde{z})\wedge(\neg\tilde{x}\vee\neg\tilde{z})\wedge\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\vee(\neg\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\right).$$

Используя (5.12), (5.9) и (5.10), получим соотношение

$$(\tilde{x}\vee\neg\tilde{z})\wedge(\neg\tilde{x}\vee\neg\tilde{z})\wedge\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\vee(\neg\tilde{y}\vee\neg\tilde{z})\right)\approx\left((\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\vee\neg\tilde{z}\right)\wedge\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\vee\neg\tilde{z}\right).$$

Применим к полученному выражению (5.12)

$$\left((\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\vee\neg\tilde{z}\right)\wedge\left((\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\vee\neg\tilde{z}\right)\approx\left((\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\wedge(\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\right)\vee\neg\tilde{z}$$

На основании (5.19) имеем

$$\left((\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\wedge(\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\right)\vee\neg\tilde{z}\approx(\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\vee\neg\tilde{z}$$

Для завершения доказательства применим (5.17)

$$\left((\tilde{x}\wedge\neg\tilde{x})\wedge(\tilde{y}\vee\neg\tilde{y})\right)\vee\neg\tilde{z}\approx(\tilde{y}\wedge\neg\tilde{y})\vee\neg\tilde{z}$$

. Что и требовалось доказать.

5.5. Нечеткие предикаты и кванторы

Рассмотрим такие нечеткие логические формулы, которые определены не на нечетких высказывательных переменных, а на каком-либо множестве X. Свои значения формула принимает из интервала [0,1]. Такие нечеткие формулы называются нечетки предикатами. Заметим, что функция μ_A ,введенная при рассмотрении нечеткого множества $\tilde{A}$ в множестве X, является одноместным нечетким предикатом, определенным на множестве X.

Пример 5.5. Пусть X={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Тогда нечеткий предикат A(x) -"быть небольшим числом"- может принимать следующие значения:

$\tilde{A}(1)=1, \tilde{A}(2)=0.9, \tilde{A}(3)=0.7, \tilde{A}(4)=0.3,$

$\tilde{A}(5)=0.1, \tilde{A}(6)=0, \tilde{A}(7)=0, \tilde{A}(8)=0, \tilde{A}(9)=0, \tilde{A}(10)=0$

и фактически задает нечеткое множество $\tilde{A}=\{<1|1>,<0.9|2>,<0.7|3>,<0.3|4>,<0.1|5>\}$ в множестве X.

Пусть нечеткий предикат $\tilde{A}(x)$ определен на множестве X={x1,x2,...xn.}. Тогда для каждого $x\in X$ определено значение $\mu_A(x)$ предиката $\tilde{A}(x)$.

Величину

$$\mu(\tilde{A})=\mu_A(x1)\wedge\mu_A(x2)\wedge\ldots\wedge\mu_A(xn)=\bigcap_{x\in X}\mu_A(x) \qquad (5.26)$$

назовем степенью общности свойства $\tilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\mu(\tilde{A})\geq 0.5$, то на логическую формулу $\tilde{A}(x)$ может быть навешен квантор нечеткой общности $\tilde{\forall}$, который читается "для всех...", или "для любого...".

Аналогичным образом, величину

$$\tilde{\forall}(\tilde{A})=\mu_A(x1)\wedge\mu_A(x2)\wedge\ldots\wedge\mu_A(xn)=\bigcup_{x\in X}\mu_A(x) \qquad (5.27)$$

назовем степенью существования свойства $\tilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\tilde{\forall}(\tilde{A})\geq 0.5$, то на логическую формулу $\tilde{A}(x)$ может быть навешен квантор существования $\tilde{\exists}$, который читается "существует такой...", или "имеется такой...".

Пусть $\tilde{A}(x)$ - нечеткая логическая формула от одной переменной, принимающей значения из множества X. Выражение $(\tilde{\forall}x\in X)\tilde{A}(x)$ является нечетко истинной формулой и читается "для любого $x\in X$ степень истинности $\tilde{A}(x)$ больше или равна 0.5", а выражение $\left(\tilde{\exists}x\in X\right)\tilde{A}(x)$ является нечетко истинной формулой и читается “существует такой $x\in X$, что степень истинности высказывания $\tilde{A}(x)$ больше или равно 0.5».

Найдем по формуле (5.13) величину $\neg\mu(\tilde{A})$, применяя к правой части (5.26) операцию отрицания. Получим

$$\neg\mu(\tilde{A})=\neg\mu_A(x1)\wedge\neg\mu_A(x2)\wedge\ldots\wedge\mu_A(xn)=\bigcup_{x\in X}\neg\mu(x) \qquad (5.28)$$

На основании (5.28) имеем

Отсюда следует, что

$$\neg\left(\left(\tilde{\forall}x\in X\right)\tilde{A}(x)\right)\approx\left(\tilde{\exists}x\in X\right)\neg\tilde{A}(x) \qquad (5.29)$$

Аналогично можно показать, что

$$\neg\left(\left(\tilde{\exists}x\in X\right)\neg\tilde{A}(x)\right)\approx\left(\tilde{\forall}x\in X\right)\neg\tilde{A}(x) \qquad (5.30)$$

Порядок навешивания одноименных нечетких кванторов несуществен, в то время как менять местами разноименные нечеткие кванторы в общем случае нельзя.

5.6. Операции над нечеткими множествами.

Более полное изложение операций над нечеткими множествами представлено в [26], [28]. Здесь мы ограничимся кратким изложением, подкрепленным примерами.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ - нечеткие множества, причем

$$\tilde{A}=\left\{<\mu_A(x)|x>\right\},\tilde{B}=\left\{<\mu_B(x)|x>\right\},x\in X$$

Пересечением множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое множество, которое определяется следующим образом

$$\tilde{A}\wedge\tilde{B}=\left\{<\mu_{A\wedge B}(x)|x>\right\},x\in X$$

, где

$$\mu_{A\wedge B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)). \qquad (5.31)$$

Объединением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое множество, обозначаемое $A\vee B$ и определяемое как

$$\tilde{A}\vee\tilde{B}=\left\{<\mu_{A\vee B}(x)|x>\right\},x\in X$$

,где

$$\mu_{A\vee B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)). \qquad (5.32)$$

Дополнением множества $\tilde{A}$ называется и через ★ обозначается нечеткое множество

$$\neg\tilde{A}=\left\{<\mu_{\neg A}(x)|x>\right\},x\in X$$

, где

$$\mu_{\neg A}(x)=1-\max(\mu_A(x). \qquad (5.33)$$

Разностью множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется множество

$$\tilde{A}\setminus\tilde{B}=\left\{<\mu_{A\setminus B}(x)|x>\right\},x\in X$$

, где

$$\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}}(x)=\mu_A(x)\wedge\neg\mu_B(x). \qquad (5.34)$$

Пример 5.6. Пусть $\tilde{A}=\left\{<0.3|x1>,<0.8|x3>,<0.4|x6>\right\}$ и $\tilde{B}=\left\{<0.9|x1>,<0.2|x2>,<0.4|x3>,<0.5|x4>\right\}$ - нечеткие множества в множестве $X=\left\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7\right\}$. Найдем $\tilde{A}\wedge\tilde{B},\tilde{A}\vee\tilde{B},\neg\tilde{A},\neg\tilde{B}$ на основании данных выше определений:

$$\tilde{A}\vee\tilde{B}=\left\{<0.9|x1>,<0.2|x2>,<0.8|x3>,<0.4|x6>\right\},$$

$$\tilde{A}\wedge\tilde{B}=\left\{<0.3|x1>,<0.4|x3>\right\},$$

$$\neg\tilde{A}=\left\{<0.7|x1>,<1|x2>,<0.2|x3>,<1|x4>,<1|x5>,<0.6|x6>,<1|x7>\right\},$$

$$\neg\tilde{B}=\left\{<0.1|x1>,<0.8|x2>,<0.6|x3>,<0.5|x4>,<1|x5>,<1|x6>,<1|x7>\right\},$$

$$\tilde{A}\setminus\tilde{B}=\left\{<0.9|x1>,<0.2|x2>,<0.8|x3>,<0.4|x6>\right\},$$

$$\tilde{B}\setminus\tilde{A}=\left\{<0.7|x1>,<0.2|x2>,<0.2|x3>,<0.5|x4>\right\}.$$

Можно предложить такую интерпретацию приведенного примера. Пусть $\tilde{A}$ - множество "отличников" студентов, а $\tilde{B}$ - множество "спортсменов" студентов на множестве студентов какого-то университета. Тогда $\tilde{A}\wedge\tilde{B}$ - нечеткое множество студентов одновременно "отличников" и "спортсменов", $\tilde{A}\vee\tilde{B}$ - множество студентов "отличников" или "спортсменов", $\neg\tilde{A}$ - множество студентов "не-отличников", а $\neg\tilde{B}$ - множество студентов " не-спортсменов".

$\tilde{A}\setminus\tilde{B}$ - множество студентов одновременно "отличников" и "не - спортсменов", B\A - множество студентов "спортсменов" и "не-отличников".

При построении нечетких моделей важную роль играют понятия *нечеткого включения* и *нечеткого равенства* множеств.

Пусть $\tilde{A} u \tilde{B}$ - нечеткие множества в X. *Степенью включения* множества $\tilde{A}$в $\tilde{B}$ называется величина

$$\nu(\tilde{A},\tilde{B})=\bigcap_{x\in X}\left(\mu_A(x)\to\mu_B(x)\right), \quad (5.35)$$

где $\mu_A(x),\mu_B(x)$ - значения функций принадлежности нечетких множеств $\tilde{A} u \tilde{B}$ соответственно.

Аналогично можно определить степень включения $\nu(\tilde{A},\tilde{B})$ расплывчатого множества $\tilde{B}$ в множество $\tilde{A}$.

Если $\nu(\tilde{A},\tilde{B})\geq 0.5$, то полагают, что множество A нечетко включается в множество B и обозначается $\tilde{A}\subsetneqq\tilde{B}$. В противном случае множество A нечетко не включается в B, и обозначается $\tilde{A}\not\subseteq\tilde{B}$.

Степенью равенства нечетких множеств A и B называется величина

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\bigcap_{x\in X}\left(\mu_A(x)\leftrightarrow\mu_B(x)\right) \quad (5.36)$$

Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B})\geq 0.5$, то полагают, что множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ *нечетко* равны, и обозначают $\tilde{A}\approx\tilde{B}$.

Если $\mu(\tilde{A},\tilde{B})\leq 0.5$, то множества расплывчато не равны $\tilde{A}\not\approx\tilde{B}$.

Операции импликации → и эквивалентности ↔ определяются соответственно по (5.4) и (5.5); величины $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ понимаются как нечеткие высказывательные переменные, а $\bigcap_{x\in X}$ - операция конъюнкции, определяемая по (5.1), которая берется по всем $x\in X$.

Понятие расплывчатого равенства является обобщением понятия равенства четких множеств A и B, так как в этом случае при A =B имеем $\mu(A,B)=1$.

Используя определение эквивалентности в (5.31) и учитывая коммутативность конъюнкции, получим

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\bigcap_{x\in X}\left(\left(\mu_A(x)\to\mu_B(x)\right)\right)\wedge\left(\mu_B(x)\to\mu_A(x)\right),$$

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\bigcap_{x\in X}\left(\left(\mu_A(x)\to\mu_B(x)\right)\right)\wedge\bigcap_{x\in X}\left(\mu_B(x)\to\mu_A(x)\right)$$

Отсюда, на основании (5.30), следует

$$\mu(\tilde{A},\tilde{B})=\nu(\tilde{A},\tilde{B})\wedge\nu(\tilde{B},\tilde{A}) \quad (5.37)$$

Пример 5.7. X= {x1,x2,x3,x4,x5},

$\tilde{A}=\{<0.3|x2>,<0.6|x3>,<0.4|x5>\}$

$\tilde{B}=\{<0.8|x1>,<0.5|x2>,<0.7|x3>,<0.6|x5>\}$

Тогда

$\nu(\tilde{A},\tilde{B})=(0.8\to 0)\wedge(0.3\to 0.5)\wedge(0.6\to 0.7)\wedge(0\to 0)\wedge(0.4\to 0.6)=$
$=1\wedge 0.7\wedge 0.7\wedge 1\wedge 0.6=0.6.$

$\nu(\tilde{B},\tilde{A})=(0.8\to 0)\wedge(0.5\to 0.3)\wedge(0.7\to 0.6)\wedge(0\to 0)\wedge(0.6\to 0.4)=$
$=0.2\wedge 0.5\wedge 0.6\wedge 1\wedge 0.4=0.2.$

Таким образом, $\tilde{A}\subsetneqq\tilde{B}$, а $\tilde{A}\not\subseteq\tilde{B}$.

$\mu(\tilde{A},\tilde{B}) = (0 \leftrightarrow 0.8) \wedge (0.3 \leftrightarrow 0.5) \wedge (0.6 \leftrightarrow 0.7) \wedge (0 \leftrightarrow 0) \wedge (0.6 \leftrightarrow 0.4) =$

$= \nu(\tilde{A},\tilde{B}) \wedge \nu(\tilde{B},\tilde{A}) = 0.6 \wedge 0.2 = 0.2$

Пусть $\tilde{A} = \left\{ <\mu_A(x)|x> \right\}, \tilde{B} = \left\{ <\mu_B(y)|y> \right\}, y \in Y$ есть нечеткие множества в X и Y соответственно. *Степенью нечеткости* $\rho(\tilde{A})$ множества $\tilde{A}$ в X есть отрицание степени равенства между множеством $\tilde{A}$ и его носителем A, т.е.

$\rho(\tilde{A}) = 1 - \mu(\tilde{A}, A)$

На основании (5.33) имеем

$\rho(\tilde{A}) = 1 - \bigcap_{x \in X} \mu_A(x) \leftrightarrow \mu_A(x)$

Где

$\mu_A = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A \end{cases}$

Если $\mu_A(x) = 0$, то $x \notin A$ В этом случае величина $\mu_A(x) \leftrightarrow \mu_A(x)$ равна единице. Поэтому $\bigcap_{x \in X}$ в выражении $\rho(\tilde{A})$ можно заменить $\bigcap_{x \in X}$. Поскольку для всех $x \in A$ величина $\mu_A(x) = 1$, то получаем $\rho(\tilde{A}) = 1 - \bigcap_{x \in X} \mu_A(x) \leftrightarrow 1$

На основании определения операции эквивалентности окончательно имеем

$\rho(\tilde{A}) = 1 - \bigcap_{x \in X} \mu_A(x)$.

Нечеткое множество $\tilde{E} = \left\{ < \mu_E(x), x > | x0\ X \right.$ назовем нечетко индифферентным в X, если $(\forall x \in X)(\mu_E(x) = 0.5)$.

5.7. Основные свойства операции над нечеткими множествами

Пусть $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ -произвольные нечеткие множества в X. Имеют место следующие свойства:

$\neg\left(\neg\tilde{A}\right)\approx\tilde{A};$ (инволюция) (5.38)

$\tilde{A}\vee\tilde{A}\approx\tilde{A};$ (идемпотентность) (5.39)

$\tilde{A}\wedge\tilde{A}\approx\tilde{A};$

$\tilde{A}\vee\tilde{B}\approx\tilde{B}\vee\tilde{A};$ (коммутативность) (5.40)

$\tilde{A}\wedge\tilde{B}\approx\tilde{B}\wedge\tilde{A};$

$\tilde{A}\vee\left(\tilde{B}\vee\tilde{C}\right)\approx\left(\tilde{A}\vee\tilde{B}\right)\vee\tilde{C}\approx\tilde{A}\vee\tilde{B}\vee\tilde{C};$ (ассоциативность) (5.41)

$\tilde{A}\wedge\left(\tilde{B}\wedge\tilde{C}\right)\approx\left(\tilde{A}\wedge\tilde{B}\right)\wedge\tilde{C}\approx\tilde{A}\wedge\tilde{B}\wedge\tilde{C};$

$\tilde{A}\vee\left(\tilde{B}\wedge\tilde{C}\right)\approx\left(\tilde{A}\vee\tilde{B}\right)\wedge\left(\tilde{B}\vee\tilde{C}\right);$ (дистрибутивность) (5.42)

$\tilde{A}\wedge\left(\tilde{B}\vee\tilde{C}\right)\approx\left(\tilde{A}\wedge\tilde{B}\right)\vee\left(\tilde{A}\wedge\tilde{C}\right);$

$\neg\left(\tilde{A}\vee\tilde{B}\right)\approx\neg\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B};$ (Закон де Моргана) (5.43)

$\neg\left(\tilde{A}\wedge\tilde{B}\right)\approx\neg\tilde{A}\vee\neg\tilde{B};$

$\tilde{A}\vee\neg\tilde{A}\approx\tilde{B}\vee\neg\tilde{B};$ (5.44)

$\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A}\approx\tilde{B}\wedge\neg\tilde{B};$

$\tilde{A}\vee\neg\tilde{A}\vee\tilde{B}\approx\tilde{B}\vee\neg\tilde{B}\vee\tilde{A};$ (5.45)

$\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A}\wedge\tilde{B}\approx\tilde{B}\wedge\neg\tilde{B}\wedge\tilde{A};$

$\left(\tilde{A}\vee\neg\tilde{A}\right)\vee\left(\tilde{B}\wedge\neg\tilde{B}\right)\approx\tilde{A}\vee\neg\tilde{A};$ (5.46)

$\left(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A}\right)\wedge\left(\tilde{B}\wedge\neg\tilde{B}\right)\approx\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A};$ (5.47)

$\tilde{A}\backslash\tilde{B}\approx\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B};$

$\left(\tilde{A}\underset{\sim}{\subseteq}\tilde{B}\right)\approx\left(\neg\tilde{B}\underset{\sim}{\subseteq}\tilde{A}\right);$ (5.48)

$\left(\neg\tilde{A}\underset{\sim}{\subseteq}\tilde{B}\right)\approx\left(\neg\tilde{B}\underset{\sim}{\subseteq}\tilde{A}\right);$ (5.49)

$\left(\tilde{A}\underset{\sim}{\subseteq}\left(\tilde{B}\vee\neg\tilde{B}\right)\right)\approx\left(\left(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A}\right)\underset{\sim}{\subseteq}\tilde{B}\right);$ (5.50)

$\left(\left(\tilde{A}\wedge\neg\tilde{A}\right)\underset{\sim}{\subseteq}\left(\tilde{B}\vee\tilde{C}\right)\right)\approx\left(\left(\tilde{B}\wedge\neg\tilde{B}\right)\underset{\sim}{\subseteq}\left(\tilde{A}\vee\tilde{C}\right)\right);$ (5.51)

$\tilde{A}\vee\varnothing\approx\tilde{A}, A\wedge\varnothing\approx\varnothing;$ (5.52)

$\tilde{A}\vee X\approx X, \tilde{A}\wedge X\approx\tilde{A}$ (5.53)

Для доказательства нечетких равенств (5.38) - (5.53) множеств $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, полученных из множеств $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ в X с помощью логических операций, необходимо использовать выражения (5.31)—(5.37) и соотношения для расплывчато близких формул (5.8)-(5.25), показать, что степень равенства $\mu(\tilde{P},\tilde{Q})\geq 0.5$. Поскольку величина $\mu(P,Q)$ в соответствии с (5.2) равна наименьшему из значений степеней истинности эквивалентности $\mu_A\leftrightarrow\mu_B$ по всем $x\in X$, то необходимо показать, что для любого $x\in X$ эта величина больше или равна 0.5, т.е. нечеткие высказывания о принадлежности любого $x\in X$ множествам $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ расплывчато близки. Если значения степеней истинности двух высказываний равны, то эти высказывания расплывчато близки. Поэтому для доказательства нечеткого равенства множеств следует показать, что для любого $x\in X$ значения функций принадлежности для каждого из этих множеств равны, т.е.

$\mu_P(x)=\mu_Q(x)$.

Докажем, например, второе выражение (5.42). Пусть μ_1 и μ_2 -соответственно функции принадлежности элементов из X множествам $\tilde{A}\wedge\left(\tilde{B}\vee\tilde{C}\right)$ и $\left(\tilde{A}\wedge\tilde{B}\right)\vee\left(\tilde{A}\wedge\tilde{C}\right)$. Для доказательства нечеткого равенства этих множеств нужно показать, что $\mu_1=\mu_2$.

Пусть x - произвольный элемент множества X. Тогда на основании (5.31) имеем

$\mu_1=\mu_A(x)\wedge\mu_{B\vee C}(x).$

Раскрываем $\mu_{B\vee C}(x)$ на основании (5.32)

$\mu_1=\mu_A(x)\wedge\left(\mu_B(x)\vee\mu_C(x)\right).$

Наконец, к полученному равенству применяем (5.12)

$\mu_B(x)\vee\mu_C(x)=\left(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\right)\vee\left(\mu_A(x)\wedge\mu_C(x)\right)$

Теперь, применив к полученной правой части последовательно (5.31) и затем (5.32), получим

$\left(\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)\right)\vee\left(\mu_A(x)\wedge\mu_C(x)\right)\quad\mu_{A\wedge B}(x)\vee\mu_{A\wedge C}(x)=\mu_2$, ч.т.д.

Выражения (5.38)-(5.53) справедливы для любых нечетких множеств $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ в X. Отсюда следует, что они справедливы и для любых четких множеств, являющихся подмножествами X. Однако возможны нечеткие равенства, не имеющие аналогов в теории четких множеств.

Каждое непустое нечеткое множество $\tilde{A}$ в X можно представить в виде

$$\tilde{A}=\bigcup_{\alpha\in p1A} A_\alpha,\quad (5.54)$$

где $A_\alpha=\left\{x\in X|\mu_A(x)\geq\alpha\right\}$ - четкое множество, состоящее из тех $x\in X$, для которых значение функций принадлежности равно или больше некоторого уровня *a*. Причем

$$\mu_{\alpha A\alpha}(x)=\alpha\mu_{A\alpha}(x)\qquad (5.55)$$

Таким образом, $\alpha A\alpha$ - это множество *a*-уровня с носителем A_a.

Пример 5.8. Пусть $\tilde{A}=\left\{<0.8|x1>,<1|x2>,<0.1|x3>,<0.5|x5>\right\}$. Поскольку $p_1=\left\{0.8,\ 1,\ 0.1,\ 0.5\right\}$, найдем четкие множества $p_1=\{A_{0.8}, A_1, A_{0.1}, A_{0.5}\}$:

$A_{0.8}=\left\{x1,x2\right\}$, $A_1=\left\{x2\right\}$, $A_{0.1}=\left\{x1,x2,x3,x5\right\}$, $A_{0.5}=\left\{x1,x2,x5\right\}$

Можно проверить, что $\cup_\alpha \alpha A\alpha=\tilde{A}$. Действительно,

$\tilde{A}=\left\{<0.1|x1>,<0.1|x2>,<0.1|x3>,<0.1|x5>\right\}\cup\left\{<0.5|x1>,<0.5|x2>,<0.5|x5>\right\}$

$\cup\left\{<0.8|x1>,<0.8|x2>\right\}\cup\left\{<1|x2>\right\}.$

Декартовым (прямым) произведением нечетких множеств $\tilde{A}u\tilde{B}$ называется расплывчатое множество $\tilde{A}\times\tilde{B}$ в X xY, определяемое как

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\left\{<\mu_{A\times B}(x,y)|(x,y)>\right\},(x,y)\in X\times Y,\qquad (5.56)$$

где

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)=\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right)\quad (5.57)$$

Данное определение прямого произведения нечетких множеств вытекает их определения четких множеств и из выражения (5.54). Представим на основании (5.54) нечеткие множества $\tilde{A}u\tilde{B}$, $\tilde{A}\times\tilde{B}$ в виде $\tilde{A}=\cup_\alpha \alpha A\alpha$, $\tilde{B}=\cup_\alpha \alpha B\alpha$, и $\tilde{A}\times\tilde{B}=\cup_\alpha \alpha(\tilde{A}\times\tilde{B})\alpha$, где $\alpha\in\left\{p1\tilde{A}\cup p1\tilde{B}\right\}$. Тогда

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\cup_{\alpha}\alpha A\alpha\times\cup_{\alpha}\alpha B\alpha=\cup_{\alpha}\left(\alpha A\alpha\times\alpha B\alpha\right)\ . \quad (5.58)$$

Пример 5.9. Пусть

$\tilde{A}=\{<0.3|x1>,<0.8|x2>\}$,

$\tilde{B}=\{<0.7|y1>,<0.3|y2>,<0.9|y3>\}$.

Найти декартово произведение $\tilde{A}\times\tilde{B}$. Множество уровней есть

$p1\tilde{A}\cup p1\tilde{B}=\{0.3,0.7,0.8,0.9\}$.Тогда

$A_{0.3}=\{x1,x2\},A_{0.7}=\{x2\},A_{0.8}=\{x2\},A_{0.9}=\varnothing$,

$B_{0.3}=\{y1,y2,y3\},B_{0.7}=\{y1,y2\},B_{0.8}=\{y3\},B_{0.9}=\{y3\}$.

Отсюда

$\tilde{A}\times\tilde{B}=(0.3A_{0.3}\times0.3B_{0.3})\cup(0.7A_{0.7}\times0.7B_{0.7})\cup$

$\cup(0.8A_{0.8}\times0.8B_{0.8})\cup(0.9A_{0.9}\times0.9B_{0.9})=$

$\{<0.3|<x1,y1>>,<0.3|<x1,y2>>,<0.3|<x1,y3>>,<0.3|<x2,y1>>,<0.3|<x2,y2>>,<0.3|<x2,y3>>\}\cup$

$\{<0.7|<x2,y1>>,<0.7|<x2,y3>>\}\cup\{<0.8|<x2,y3>>\}\cup\varnothing=$

$\{<0.3|<x1,y1>>,<0.3|<x1,y2>>,<0.3|<x1,y3>>,<0.7|<x2,y1>>,<0.3|<x2,y2>>,<0.8|<x2,y3>>\}$.

Тот же результат можно получить с помощью матрицы смежности. Этот способ представления прямого произведения, на наш взгляд, более наглядный. Действительно, пусть даны те же нечеткие множества $\tilde{A}u\tilde{B}$. Матрица смежности в этом случае имеет размерность 2x3. Строки матрицы обозначают элементы множества А, а столбцы - элементы множества В. Тогда на пересечении i-строки и j-столбца помещается функция принадлежности, определенная в соответствии с (5.57):

$R_{\tilde{A}\times\tilde{B}}=$

	y1	y2	y3
x1	0.3	0.3	0.3
x2	0.7	0.3	0.8

Пусть

$\tilde{F}=\left\{<\mu_{F}<x,y>,<x,y>>|<x,y>\in X\times Y\right\}$,

$\tilde{P}=\left\{\mu_{P}<y,z>,<y,z>>|<y,z>\in Y\times Z\right\}$

Композицией (сверткой) нечетких множеств называется нечеткое множество:

$\tilde{F}\circ\tilde{P}=\left\{<\mu_{F\circ P}<x,z>,<x,z>>|<x,z>\in X,Z\right\}$,

где

$$\mu_{F\circ P}<x,z>=\bigcup_{y}\mu_{F}<x,y>\wedge\mu_{P}<y,z>,x\in X,z\in Z. \quad (5.59)$$

Отсюда следует, что <x,z>$\in X\times Z$ принадлежат нечеткому множеству $\tilde{F}\circ\tilde{P}$ с наибольшей из меньших степеней принадлежности компонируемых пар <x,y>$\in X\times Y$ и <y,z>$\in Y\times Z$ нечетким множествам $\tilde{F}u\tilde{P}$, в качестве *y* может выступать несколько компонируемых элементов.

Пример 5.10. Найти композицию (свертку) нечетких множеств

$\tilde{F}=\{<0.3|<x1,y1>>,<0.7|<x2,y1>>,<0.9|<x2,y2>>,<1|<x1,y3>>,<0.4|<x2,y3>>\}$,

$\tilde{P}=\{<1|<y1,z4>>,<0.2|<y1,z1>>,<0.8|<y1,z3>>,<0.3|<y2,z1>>,<0.4|<y2,z4>>\}$;

$\tilde{F}\circ\tilde{P}=\{<0.2|<x1,z1>>,<0.3|<x1,z3>>,<0.3|<x1,z4>>,<0.3|<x2,z1>>,<0.7|<x2,z3>>,<0.7|<x2,z4>>\}$.

5.8. Нечеткие отношения

Нечетким отношением $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ на произвольном непустом множестве X называется пара множеств, в которой $\tilde{F}$ является нечетким множеством в X. В $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ множество X называется областью задания, а $\tilde{F}$ - нечетким графиком отношения.

Носителем нечеткого отношения $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ называется четкое отношение $\varphi(X,F)$, у которого график F является носителем графика $\tilde{F}$.
Существуют четыре эквивалентных способа задания нечетких: теоретико-множественный, матричный, графический и с помощью нечетких предикатов.
Для задания отношения в теоретико-множественном виде необходимо перечислить множество $X=\{xi\}, i \in I=\{1,\dots,n\}$ и задать нечеткий график

$$\tilde{F}=\left\{<\mu_F<xi,xj>,<xi,xj>>|<xi,xj>\in X\times X\right\}.$$

В матричном виде нечеткое отношение задается с помощью матрицы смежности Rφ`, строки и столбцы которой помечены элементами $x \in X$, а на пересечении xi, строки и xj столбца находится элемент $r_{ij}=\mu_F<xi,xj>$, где μ_F - функция принадлежности элементов из XxX нечеткому графику $\tilde{F}$.
Нечеткое отношение можно задать в виде графа с множеством вершин X, дугам $<xi,xj>$ которого приписано соответствующее значение $\mu_F<xi,xj>$ функции принадлежности μ_F.

Пример. Зададим нечеткое отношение $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$, у которого X={x1,x2,x3,x4,x5,x6}, а нечеткий $\tilde{F}=\{<0.5|<x1,x6>>,<0.7|<x1,x5>>,<0.4|<x2,x3>>,<0.8|<x3,x3>>,<0.2|<x4,x3>>,$ $<0.3|<x4,x6>>,<0.6|<x6,x4>>,<1|<x6,x3>>,<1|<x6,x6>>\}$.

Матрица смежности нечеткого отношения $\tilde{\varphi}$ имеет вид:

		x1	x2	x3	x4	x5	x6
	x1	0	0	0	0	0.7	0.5
	x2	0	0	0.4	0	0	0
Rφ` =	x3	0	0	0.8	0	0	0
	x4	0.1	0	0.2	0	0	0.3
	x5	0	0	0	0	0	0
	x6	0	0	1	0.6	0	1

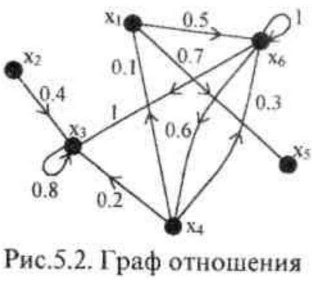

Рис.5.2. Граф отношения

Пусть $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ - произвольное нечеткое отношение. Если пара $\mu_F<a,b>,<a,b>>\in\tilde{F}, a,b\in X$, то выражение $a\tilde{\varphi}b$ представляет собой нечеткое логическое высказывание, значение истинности которого равно $\mu_F<a,b>$. Отсюда следует, что для задания нечеткого отношения φ` на X необходимо задать нечеткую формулу $xi\tilde{\varphi}xj$, от двух переменных или нечеткий предикат, который определен на множестве X, а значения принимает из интервала [0,1].

Пусть $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ и $\tilde{\psi}=(X,\tilde{P})$ - некоторые отношения на X. Определим степень равенства отношений $\tilde{\psi} и \tilde{\varphi}$:

$$\mu(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})=\bigcap_{<xi,xj>\in X^2}(\mu_F<xi,xj>\leftrightarrow\mu_P<xi,xj>),$$

(5.60)

Если $\mu(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})\geq 0.5$, то отношения $\tilde{\psi} u \tilde{\varphi}$ нечетко равны, т.е. $\tilde{\psi}\approx\tilde{\varphi}$. Если же $\mu(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})<0.5$, то отношения нечетко не равны. При $\mu(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})=0.5$ отношения $\tilde{\psi} u \tilde{\varphi}$ взаимно индифферентны.

Степенью $\rho(\tilde{\varphi})$ *нечеткости отношения* $\tilde{\varphi}$ называется величина

$$\rho(\tilde{\varphi})=1-\mu(\varphi,\tilde{\varphi}),$$

где φ - носитель расплывчатого отношения $\tilde{\varphi}$. На основании (5.60) имеем

$$\mu(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})=\bigcap_{<xi,xj>\in X^2}(\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>\leftrightarrow\mu_F<xi,xj>),$$

где

$$\mu_F<xi,xj>=\begin{cases}1,\text{если } <xi,xj>\in F,\\ 1,\text{ если} <xi,xj>\notin F.\end{cases}$$

(5.61)

Если $\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>=0$, то пара <xi,xj>$\in F$, т.е. $\mu_F<xi,xj>=0$. Отсюда степень истинности высказывания

$$\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>\leftrightarrow\mu_F<xi,xj>\mu(\varphi,\tilde{\varphi})$$

равна единице. Поскольку <xi,xj>$\in F$ и величина $\mu_F<xi,xj>=1$, то выражение (5.61) можно записать в виде:

$$\rho(\tilde{\varphi})=1-\bigcap_{<xi,xj>\in F}(\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>)$$

(5.62)

Пусть $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$ и $\tilde{\psi}=(X,\tilde{P})$ - произвольные нечеткие отношения на X. Отношение $\tilde{\varphi}$ нечетко включается в отношение *y*, если $\tilde{F}\subsetneqq\tilde{P}$. Это обозначается $\tilde{\psi}\subsetneqq\tilde{\varphi}$.

Объединением отношений $\tilde{\psi} u \tilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\eta}(X,\tilde{S})$, если $\tilde{\eta}=\tilde{\psi}\cup\tilde{\varphi}$. При этом для любых $<xi,xj>\in S$ справедливо

$$\mu_{\tilde{S}}<xi,xj>=\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>\vee\mu_{\tilde{P}}(xi,xj)$$

(5.63)

Пересечением отношений $\tilde{\psi} u \tilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\pi}(X,\tilde{U})=\tilde{\psi}\cap\tilde{\varphi}$, если $\tilde{U}=\tilde{F}\cap\tilde{P}$.

При этом имеет место

$$\mu_{\tilde{U}}<xi,xj>=\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>\wedge\mu_{\tilde{P}}<xi,xj>$$

(5.64)

Дополнением отношения $\tilde{\varphi}$ называется отношение $\neg\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$, у которого для любых $<xi,xj>\in X$ справедливо

$$\mu_{\neg\tilde{F}}<xi,xj>=1-\mu_{\neg\tilde{F}}<xi,xj>$$

(5.65)

Инверсией отношения $\tilde{\varphi}$ называется нечеткое отношение $\tilde{\varphi}^{-1}(X,\tilde{F}^{-1})$, для которого справедливо

$$\mu_{\tilde{F}^{-1}}<xi,xj>=\mu_{\tilde{F}}<xi,xj>$$

(5.66)

Композицией (сверткой) отношений $\tilde{\psi} u \tilde{\varphi}$ называется отношение $\nu(X,\tilde{V}),\nu=\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}$, у которого нечеткий график $\tilde{V}=\tilde{F}\circ\tilde{P}$ и для любых xi, xj, xk$\in X$ выполняется соотношение:

$$\mu_F<xi,xj>=\bigcup_{xk}(\mu_F<xi,xj>)\bigcap_{xk}(\mu_F<xi,xj>)$$

(5.67)

В выражении (5.67), называемого сверткой max- min, операция ⋃ означает взятие максимума для всех xk, а ⋂ - взятие минимума.

Для произвольных отношений $\tilde{\varphi}(X,\tilde{F})$, $\tilde{\psi}=(X,\tilde{P})$ и $\nu(X,\tilde{S})$ справедливы свойства:

$\left(\tilde{\varphi}\cup\tilde{\psi}\right)^{-1}\approx\tilde{\varphi}^{-1}\cup\tilde{\psi}^{-1};$

$\left(\tilde{\varphi}\cap\tilde{\psi}\right)^{-1}\approx\tilde{\varphi}^{-1}\cap\tilde{\psi}^{-1};$

$\left(\neg\tilde{\varphi}\right)^{-1}\approx\neg\left(\tilde{\varphi}^{-1}\right);$

$\left(\tilde{\varphi}\cup\tilde{\psi}\right)^{-1}\approx\tilde{\psi}^{-1}\circ\tilde{\varphi}^{-1};$

$\tilde{\varphi}\circ\left(\tilde{\psi}\cup\tilde{\nu}\right)\approx\left(\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}\right)\cup\left(\tilde{\varphi}\circ\tilde{\nu}\right)$

$$R=\begin{Vmatrix}0 & 0.1 & 0.6 & 1\\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6\\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\qquad S=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.5 & 1\end{Vmatrix}$$

Композицию отношений можно найти из "произведения" полученных матриц:

$$R\circ S=\begin{Vmatrix}0 & 0.1 & 0.6 & 1\\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6\\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\circ\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.9\\ 0 & 0 & 0.5 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0.5 & 1\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.6\\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

5.9. Нечеткие выводы

В случае нечеткой логики правила вывода заключений такие же, как и в четкой логике. Однако, если в четкой логике вывод основан на точном знании факта, то в нечеткой логике, вывод базируется на множестве возможных фактов, появление которых определяется функцией принадлежности. Например, рассмотрим известное правило *modus ponens* для четких систем: P→Q и P, то Q, т.е. вывод Q из факта P по правилу P→Q. То же правило применимо и для нечетких рассуждений, но в этом случае мы должны записать: $\tilde{F}\to\tilde{G}$ и $\tilde{F}`$, то $\tilde{G}`$. Если знания нечеткие, то множества $\tilde{F}$ и $\tilde{F}`$ необязательно совпадают. Если $\tilde{F}$ и $\tilde{F}`$ близки друг другу, то можно их сопоставить и получить вывод $\tilde{G}`$.

Знание $\tilde{F}\to\tilde{G}$ отражает нечеткое причинное отношение посылки и заключения. Назовем это отношение нечетким R: R=$\tilde{F}\to\tilde{G}$. R можно рассматривать как нечеткое множество прямого произведения XxY полного пространства посылок X и полного пространства заключений Y. Таким образом, процесс получения результата вывода $\tilde{G}`$ с использованием наблюдения $\tilde{F}`$ и знания правила можно представить в виде композиции:

$$\tilde{G}`=\tilde{F}`\circ\left(\tilde{F}\to\tilde{G}\right).$$

Вывод G` определяется из свертки max-min нечеткого множества F' и отношения R на основании (5.59), (5.67), а также (5.54) и (5.55):

В полученной матрице (вектор-строке) каждый i-й элемент представляет значение функции принадлежности множества $\tilde{G}`$. Таким образом, мы получили множество

$\tilde{G}`$ ={<0|1>,<0.1|2>,<0.6|3>,<0.6|4>}.

Иными словами, ответ - "в некоторой степени больше".

Пример 5.13 .Рассмотрим нечеткий вывод в задаче принятия решения о неисправности автомобиля при упрощенной диагностике. Такой подход может быть использован в других диагностических системах. Очевидно, что сложность решения будет зависеть от полноты описания системы.

Пусть полное пространство посылок X состоит из т факторов, а полное пространство заключений - из *n* симптомов:

X={x1,x2,…xm},

Y={y1,y2,...,yn}.

При m=2, n=3 можно интерпретировать посылки и симптомы (заключения) следующим образом:

x1 -неисправность аккумулятора,

x2- неисправность в карбюраторе,

y1 - затрудненный запуск,

y2- ухудшение цвета выхлопных газов,

y3- недостаток мощности.

Между каждой предпосылкой и каждым заключением имеется причинное отношение, которое обозначим импликацией xi→yj. Все такие отношения образуют матрицу нечетких отношений R. Конкретные предпосылки и заключения можно рассматривать как нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ на пространстве X и Y. Тогда отношение этих множеств имеет вид:

$$\tilde{B}=\tilde{A}\circ R \qquad \text{(i)}$$

Будем считать, что знания эксперта определены матрицей R и она известна. Кроме того, известны по наблюдениям конкретные в данный момент тестирования значения множества $\tilde{B}$. Задача состоит в определении значений элементов множества посылок $\tilde{A}$, т.е. по следствиям определить причину. Пусть матрица R отношений имеет вид:

$$R=\begin{Vmatrix}0.9 & 0.1 & 0.2\\ 0.6 & 0.5 & 0.5\end{Vmatrix}$$

Пусть конкретное состояние автомобиля определяется множеством

$\tilde{B}=\{<0.9|y1>,<0.1|y2>,<0.2|y3>\}$.

Необходимо определить элементы множества $\tilde{A}=\{<a1|x1>,<a2|x2>\}$. Тогда выражение (i) принимает вид:

$$\|0.9 \quad 0.1 \quad 0.2\| = \|a1 \quad a2\| \circ \begin{Vmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 & 0.5 \end{Vmatrix}$$

или в транспонированном виде:

$$\begin{Vmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} a1 \\ a2 \end{Vmatrix}$$

Раскрыв это векторно-матричное выражение, получим:

$0.9=(0.9\wedge a1)\vee(0.6\wedge a2),$ (ii)

$0.1=(0.1\wedge a1)\vee(0.5\wedge a2),$ (iii)

$0.2=(0.2\wedge a1)\vee(0.5\wedge a2),$ $(\mathrm{IV}i)$

Второй член правой части (*ii*) не влияет на левую часть, поэтому:

$0.9=(0.9\wedge a1)$ и $a1\geq 0.9$

Из (*iii*) имеем:

$0.1\geq 0.5\wedge a2,\ a2\leq 0.1.$

Таким образом,

$1\geq a1\geq 0.9,\ 0\leq a2\leq 0.1,$ т.е. лучше заменить аккумулятор (a1 - степень неисправности аккумулятора, a2 - степень неисправности карбюратора), и множество $\tilde{A}$ может иметь одно из двух значений:

$\tilde{A}=[<1|x1>,<0.1|x2>]$ и $\tilde{A}`=[<0.9|x1>,<0|x2>]$.

Пример 5.15. В словесной форме заданы следующие продукционные правила:

если прибыль клиента большая

то кредитный рейтинг клиента хороший (*v*)

Нечеткими значениями здесь являются "большая" и '"хороший".

В этом примере имеем наименования двух лингвистических переменных: Прибыль и Кредитный_рейтинг. Каждая из этих лингвистических переменных определяются соответствующими множествами значений. В частности, одним из элементов такого множества для переменной прибыль является значение "большая". Это значение описывается нечеткой переменной <*Большая*,[1.4;2.2], $\tilde{A}$>,где $\tilde{A}$ может иметь, по мнению эксперта, следующий вид:

$\tilde{A}$ ={<0.1|1.4>,<0.3|1.6>,<0.8|1.8>,<0.9|1.9>,<1|2>,<2|2.2>}. (*vv*)

Аналогично, "хороший" определяется нечеткой переменной <Хороший, 14;20] $\tilde{B}$ >, где нечеткое множество имеет вид:

$\tilde{B}$ ={<0.1|14>,<0.3|16>,<0,5|17>,<0.8|18>,<0.9|19>,<1|20>}. (*vvv*)

Проектировщик экспертной системы, используя знания эксперта и полученные реальные результаты, корректирует значения функции принадлежности до тех пор, пока система наилучшим образом не будет моделировать конкретную ситуацию. Значения функции принадлежности могут храниться в базе знаний.

Лингвистическая переменная *Прибыль* может иметь различные значения: "довольно большая ", "очень большая" и т.д. Положим, что в процессе анализа документов клиента выяснилось, что "Прибыль клиента *довольно большая*" (IV*v*)

Значение *довольно большая* можно определить нечетким множеством:

$\tilde{A}$ '={<0.5|1.6>,<l|1.7>,<0.8|1.8>,<0.2|1.9>}.(V*v*)

Теперь текущее состояние базы знаний принимает следующий вид:

если *Большая* (прибыль),

то *хороший* (рейтинг). (VI*v*)

Довольно большая (прибыль).

Исходя из этого состояния базы знаний, можно сделать заключение, что клиент имеет "неплохой" рейтинг. Тогда, текущее состояние базы знаний должно модифицироваться и принять вид:

если *Большая,*
то *хороший.* (VII*v*)
Довольно большая.
Неплохой.

Необходимо построить нечеткое множество $\tilde{B}$ '(y) (*Неплохой*) по предпосылке $\tilde{A}$ '(x) и имеющейся информации $\tilde{A}$ (x) и $\tilde{B}$ (y) (правило вывода modus ponens).

Пусть *X*- полное множество значений "большая" прибыль и Y- полное множество значений "хороший" рейтинг. Назовем нечетким отношением R, отражающим нечеткое причинное отношение предпосылки и заключения ($\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$). Отношение можно рассматривать как нечеткое подмножество декартова произведения XxY полного множества предпосылок X и заключений Y. Тогда, процесс получения нечеткого вывода $\tilde{B}$ ' с использованием данных наблюдения $\tilde{A}$ ' и значения R=$\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ можно представить в форме $\tilde{B}` = \tilde{A} \circ R = \tilde{A} \circ (\tilde{A} \rightarrow \tilde{B})$, где ∘ - операция свертки. В развернутом виде имеем:

$$\mu_{\tilde{B}`}(y) = \bigcup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}`}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) = \bigcup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}`}(x) \wedge (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)) =$$
$$= \bigcup_{x \in X} \mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) = \alpha \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\alpha Y \wedge \tilde{B}}(y)$$

где *a* -максимальное значение функции принадлежности $\mu_{\tilde{A} \wedge \tilde{A}`}(x)$ пересечения множеств $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{A}`(x)$.

На рис.5.3 приведен полученный вывод. Функции принадлежности нечетких множеств $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(x)$, соответствующих предпосылке и выводу в нечетком правиле (*v*), представлены на рис. 5.3а,б. На рис. 5.3в и г приведены функции принадлежности нечеткого множества наблюдения $\tilde{A}`(x)$ и пересечения множеств $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{A}`(x)$. Используем максимальное значение *a* как меру сопоставления $\tilde{A} \wedge \tilde{A}`$. По этой мере выполним редукцию заключения $\tilde{B}`(y)$ (рис. 5.3, г). Редукцией $\tilde{B}`(y)$ является отсечение по мере сопоставления a. На рисунке *aY* означает, что $\mu_{\alpha Y} = a; \forall y \in Y$.

Таким образом, для текущих наблюдений (Довольно большая) в результате применения правила

$\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ (если Большая, то Хороший) получаем $\tilde{B}`(y)$ (Неплохой). Результат вывода является нечетким множеством в Y (рис. 53,д). Однако принять окончательное решение по установлению рейтинга нельзя. Дело в том, на основе функции принадлежности необходимо извлечь для каждой точки значения в Y. Этот процесс называется *дефадзификацией* (преобразование нечеткого множества в четкое). Для этого воспользоваться, хорошо себя зарекомендовавшим методом определения центра тяжести области под кривой $\mu_{\tilde{B}`}(y)$. Тогда значение y*, соответствующее центру тяжести и будет значением выходного управляющего параметра:

$$y^* = \frac{\sum_i y_i \mu_{\tilde{B}}(y_i)}{\sum_i \mu_{\tilde{B}}(y_i) \Delta y_i}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1.}$$

Значение y*, рассчитанное по этой формуле, равно ~18.

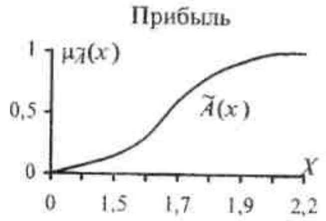

Рис. 5.3 *а*

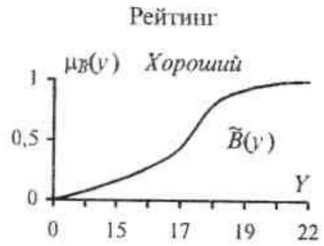

Рис. 5.3 *б*

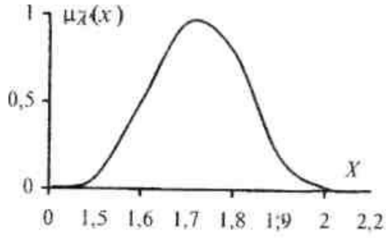

Рис. 5.3 *в*

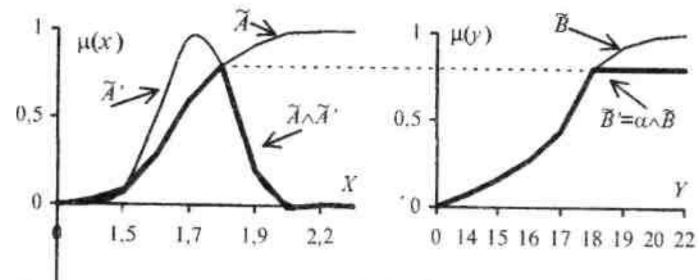

Рис. 5.3 *г*

Рис. 5.3 *д*

5.10. Построение функции принадлежности

Функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ элемента *x* нечеткому множеству $\tilde{A}$ интерпретируется как субъективная мера того, насколько элемент $x \in X$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством $\tilde{A}$. Под субъективной мерой понимается определенная опросом экспертов степень соответствия элемента *x* понятию, формализованному нечетким множеством $\tilde{A}$. Существует несколько методов построения функций принадлежности. Здесь мы рассмотрим лишь один способ парного сравнения, принадлежащий классу косвенных методов [24].

Функция принадлежности определяется по матрице попарных сравнений M=||mij||, элементы которой представляют собой некоторые оценки интенсивности принадлежности элементов $x_i \in X$ нечеткому множеству $\tilde{A}$ по сравнению с элементами $x_j \in X$. Если предположить, что функции принадлежности известны для всех $x \in X$, например, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ =ri (i=1,2,...,n), то попарные сравнения можно представить матрицей отношений M, где mij=ri/rj. Если отношения точны, то получается соотношение Mr=nr, где n - собственное число матрицы M, по которому можно восстановить вектор r с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. В [56] показано, что в общем случае эмпирический вектор r=(r1,r2,...,rn) доложен удовлетворять уравнению Mr=λmaxr, где λmax- наибольшее собственное значение. Поскольку это уравнение имеет единственное решение, то значения собственного вектора, соответствующего собственному значению, деленные на их сумму, будут искомыми степенями принадлежности.

На основании экспертного опроса может быть получена матрица попарных сравнений. Этот опрос показывает, на сколько по мнению эксперта величина $\mu_{\tilde{A}}(xi)$ превышает величину $\mu_{\tilde{A}}(xj)$, т.е. насколько элемент xi более значим для понятия, описываемого нечетким множеством $\tilde{A}$, чем элемент xj. Понятия, которыми руководствуется эксперт, и их интерпретация представлены в таблице 5.1 [1].

Таблица 5.1

Интенсивность важности	Качественная оценка	Объяснения
0	Несравнимость	Нет смысла сравнивать элементы
1	Одинаковая значимость	Элементы равны но значению
3	Слабо значимее	Существуют показания о предпочтении одного элемента другому, но показания неубедительные.
5	Существенно или сильно значимее	Существует хорошее доказательство и логические критерии, которые могут показать, что один элемент более важен.
7	Очевидно значимее	Существует убедительное доказательство большей значимости одного элемента по сравнению с другим.

9	Абсолютно значимее	Максимально подтверждается предпочтительность одного элемента другому.
2,4,6,8	Промежуточные оценки между соседними оценками	Необходим компромисс.
Обратные ненулевые значения	Если оценка mij имеет ненулевое значение, приписанное на основании сравнения элемента ri, с элементом rj, то обратное значение l/ mij.	

Для улучшения согласования оценок предполагается, что $m_{ij*}m_{jk}=m_{ik}$, откуда $m_{ii}=l$ для диагональных элементов и $m_{ij}=1/m_{ji}$ для элементов, симметричных относительно главной диагонали.

Пусть на основании экспертного опроса матрица попарных сравнений построена точно. Тогда матрица имеет вид

$$M = \begin{Vmatrix} \frac{r_1}{r_1} & \frac{r_1}{r_2} & \frac{r_1}{r_3} & \cdots & \frac{r_1}{r_n} \\ \frac{r_1}{r_1} & \frac{r2}{r_2} & \frac{r2}{r_3} & \cdots & \frac{r2}{r_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{r_n}{r_2} & \frac{r_n}{r_2} & \frac{r_n}{r_3} & \cdots & \frac{r_n}{r_n} \end{Vmatrix}$$

Для определения j-го элемента вектора r можно воспользоваться следующей процедурой. Вычислим сумму элементов i-го столбца матрицы M. Эта сумма равна некоторому значению kj,

т.е. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = k_j$.Из построения матрицы получаем $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{ri}{rj} = \frac{\sum_{i=1}^{n} ri}{rj} = \frac{1}{rj}$

Таким образом, r_j =1/kj. Продолжая процедуру по всем столбцам матрицы M, можно построит вектор r.

Теперь предположим, что матрица парных сравнений построена неточно. Тогда приведена процедура может быть использована для определения начального значения в итерационном методе решения уравнения Mr= λmaxr. При этом отклонения λmax от n можно использовать для оценки точности решения уравнения на текущем шаге. Начальная оценка вектора r в большинстве случаев получается хорошей и при отсутствии повышенных требований к точности дальнейшее определения вектора r можно не проводить.

Пример 5.16. Пусть для оценки количества какого-нибудь объекта используется лингвистическая переменная <"Количество",T,X>, где T= {"малое","среднее","большое"} - терм-множество лингвистической переменной X={0,5,10,15,...,40} - базовое множесщего терм "среднее". Опросом экспертов получена матрица парных сравнений, приведенная в таблице 5.2.

Таблица 5.2.

	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	1	1/2	1/7	1/8	1/9	1/8	1/7	1/2	1
5	2	1	1/2	1/5	1/7	1/5	1/2	1	2
10	7	2	1	1/2	1/5	1/2	1	2	7
15	8	5	2	1	1/2	1	2	5	8
20	9	7	5	2	1	2	5	7	9
25	8	5	2	1	1/2	1	2	5	8
30	7	2	1	1/2	1/5	1/2	1	2	7
35	2	1	1/2	1/5	1/7	1/5	1/2	1	2
40	1	1/2	1/7	1/8	1/9	1/8	1/7	1/2	1
e	45	24	12.28	5.65	2.9	5.65	12.28	24	45

Для определения r1 пронумеруем элементы первого столбца матрицы M. Получим k1=45. Значит, r1=1/45≈0/02. Аналогично, r2=0/04, r3=0.08, r4=0.18, r5=0.34, r6=0.18, r7=0.08, r8=0.04, r9=0.02. таким образом, r=(0.02, 0.04, 0.08, 0.18, 034, 0.18, 0,08, 0.04, 0.02). Теперь оценим точность определения элементов вектора r. Для этого подставим вычисленное значение вектора r в уравнение Mr=λmaxr и определим отклонение собственного числа матрицы M

от n. Это отклонение и будет характеризовать оценку точности определения вектора r.
После умножения матрицы M на вектор r получим вектор (0.18, 0.36, 0.85, 1.57, 0.85, 0.36, 0.18). Для оценки значения λmax поделим поэлементно полученный вектор на вектор r. Получим вектор (9, 9, 10.6, 8.7, 8.7, 8.7, 10.6, 9, 9), в котором i-й элемент есть значение λmax, соответствующее элементу ri, вектора r. Усредненное значение λmax равно 9.25. Следовательно отклонение λmax от n равно 0.25, а точность решения равна 0.25/9=0.03.

Таким образом, с точностью 3% получаем μ_C(0):=0.02, μ_C(5)=0.04, μ_C(10)=0.08, μ_C(15)=0.18, μ_C(20)=0.34, μ_C(25)=0.18, μ_C(30)=0.08, μ_C(35)=0.04, μ_C(40)=0.02. Для нормализации нечеткого множества $\tilde{C}$ поделим степени полученные принадлежности на μ_C(20)=0.34 - максимальное значение. Получим μ_C(0)=μ_C(40)=0.06, μ_C(5)=μ_C(35)=0.12, μ_C (10)=μ_C (30)=0.24, μ_C(15)= μ_C(25)=0.53, μ_C(20)=1 и нечеткое множество $\tilde{C}$ имеет вид $\tilde{C}$ ={0.06|0, 0.12|5, 0.24|10, 0.53|15, 1|20, 0.53|25, 0.24|30, 0.12|35, 0.06|40}.

5.11. Принцип резолюции для нечеткой логики

Основной смысл нечеткой резолюции - проверить, содержит ли множество дизъюнктов S пустое утверждение. Напомним, что вывод пустого дизъюнкта из множества S сводится к получению резольвенты пары дизъюнктов из S, содержащих контрарные символы. Если в процессе доказательства теоремы на некотором шаге получали пустой дизъюнкт, то это означало, что теорема не выводима. Поскольку доказательство теоремы основано на методе от противного, то выводимая теорема берется с отрицанием. Поэтому получение пустой резольвенты (дизъюнкта) означает при данной постановке невыполнимость множества, и утверждение (отрицание выводимой теоремы) противоречит исходным посылкам. Следовательно, исходное утверждение должно быть верным. Таков смысл метода резолюции в четкой логике. Очевидно, что в процессе вывода получение резольвент связано с наличием контрарных пар утверждений, например, А и -А. Иными словами, метод резолюции допускает выполнение закона комплиментарности $A \wedge \neg A$ =0. В двоичной логике, разумеется, этот закон выполним. В случае нечеткой логики закон комплиментарности не всегда выполним, поэтому этот метод в прежнем виде нельзя использовать. Высказывания А и В (например), используемые для вывода нечетких резолюций, называют иногда *ключевыми словами*.

Прежде чем показать вывод метода нечеткой резолюции и примеры его использования, введем некоторые определения и основополагающие утверждения.

В нечеткой логике понятие "невыполнимый" отличается от "ложный" и "неложный" отличается от "выполнимый". Поэтому будем считать, что высказывание А, имеющее значение истинности μ_A] , невыполнимо (ложно).

Пусть F- формула и определим G как логическое следствие F. Это возможно, если и только если невыполнима конъюнкция $F \wedge \neg G$. Но в этом случае значение истинности $\mu_{(F \wedge \neg G)} \leq 0.5$ во всех интерпретациях. Если, кроме того, потребуем, чтобы μ(F)>=0.5, то μ(-G) не должно быть больше 0.5. Но $\mu(\neg G) = 1 - \mu(G)$,поэтому $\mu(G)$ ì 0.5 во всех интерпретациях, в которых $\mu(F) \geq 0.5$. Это означает, что значение истинности следствия не меньше значения истинности посылки, и если значение истинности посылки больше 0.5, то значение истинности следствия никогда не может быть меньше 0.5. В частности, в двоичной логике мы имеем $\mu(G) = 1$, если $\mu(F) = 1$. Отсюда важная

Лемма 1 [26]: *Формула G является логическим следствием в нечеткой логике, если и только если она является логическим следствием в двоичной логике*.

В дальнейшем будем предполагать, что формулы не содержат кванторов существования и приведены с помощью процедуры сколемизации, закона Де Моргана, дистрибутивного закона к дизъюнктивной нормальной форме.

Введем определение степени достоверности противоречия $A \wedge \neg A$:

$$cd(A) = \max(\mu_I(A), \mu_I(\neg A)) - \min(\mu_I(A), \mu_I(\neg A)) \qquad (5.72)$$

в интерпретации I.

Пусть два дизъюнкта определены как

$$C_1 = P \vee L_1, C_2 = \neg P \vee L_2, \qquad (5.73)$$

L1и L2не содержат P и -P. Тогда L1^L2 есть резольвента R(C1,C2) по P.

Пусть величина истинности μ(C1^C2)>0.5, Для оценки истинности резольвенты в нечеткой логике справедлива

Лемма 2: *Пусть C1 и C2- два высказывания и R(C1, C2) - резольвента этих высказываний. Пусть max(μ(C1), μ(C2))=b и min(μ(C1), μ(C2))=a>0.5. Тогда*

a<=μ(R(C1,C2))<=b.

Доказательство. Без потери общности можно представить посылки в форме (5.73). Кроме того, следующие предположения также не ограничивают общности доказательства. Пусть

μ (C1)=max(μ(P), μ (L1))=a,

(5.74)

μ (C2)=max(μ (-P), μ (L2))=b>=a.

(5.75)

Очевидно, что резольвента для C1 и C2 есть R(C1,C2)=L1 b L2. Тогда из (5.74) и (5.75) следует, что μ (L1)<=a и μ (L2)<=b. Рассмотрим два случая:

1. μ (L1)=a. Тогда

μ (R(C1,C2))= μ (L1vL2)=max(μ (L1), μ (L2))=max(a, μ (L2)).

Поэтому a< μ (R(C1,C2))<=b.

2. Примем μ (L1)<a. Из (5.74) следует, что μ (P)=a. Поскольку a>0, то

μ (-P)=l - μ (-P)<0.5<a.

Аналогично, из (5.57) имеем μ (L2)=b>=a и

μ (R(C1,C2))= μ (L1vL2)=max(μ (L1), μ (L2))=b.

Поэтому

a<= μ (R(C1,C2))<=b. Ч.т.д.

Пусть резолюция S, обозначенная R(S), есть множество, в котором элементы множества S резольвируют парами друг с другом. Для n-й резолюции $R^n(S)$ имеем:

$$R^0(S)=S, \qquad R^{n+1}(S)=R(R^n(S)) \qquad (5.76)$$

Сформулируем две теоремы, которые позволят обобщить доказанную выше лемму на случай n резолюций.

Теорема 1. *В нечеткой логике если C является логическим следствием множества высказываний, то для каждого n>=0 C*0 *$R^n(S)$.*

Теорема 2. *Пусть S - множество утверждений и C1,C2,...,Cn - утверждения из S. Пусть max(μ(C1), μ (C2),..., μ (Cn))=a и min(μ(C1), μ (C2),..., μ (Cn))=a. Пусть C^n обозначает какое-то утверждение в множестве $R^n(S)$. Тогда для каждого n=>0*

a<= μ (C^n)<=b.

Теорема 2 позволяет сделать важное заключение. Если каждое утверждение из S является немного больше, чем "полуистина" и самое ненадежное утверждение имеет значение истинности, равное *a*, то мы можем гарантировать, что все логические следствия, полученные многократным применением резолюции, будут иметь значение истинности не меньше самого ненадежного утверждения, но никогда не превысит значение истинности для надежного утверждения.

Пусть S -множество дизъюнктов - множество аксиом вывода. Пусть в процессе вывода пара дизъюнктов из S образует резольвенту, скажем, по ключевому слову A. Иными словами, в исходных дизъюнктах имеется контрарная пара, образующая противоречие $A \wedge \neg A$. Поэтому значение истинности резолюции как следствие вывода определяется значением истинности противоречия. Тогда степень достоверности противоречия (5.73) можно считать степенью достоверности нечеткой резольвенты.

В соответствии с доказанной леммой (для общего случая -теоремой) определена нижняя граница резолюции. Если R(C1,C2) является следствием {C1,C2}, то справедливы следующие оценки

μ(C1 ^C2)<= μ (C1,C2))= μ (C1vC2).

Отсюда следует, что μ ($A \wedge \neg A$)<=μ (R(C1,C2)).

Наоборот, если

μ ($A \wedge \neg A$)>=μ (R(C1,C2)), то μ (C1^C2)>= μ (R(C1,C2)). Этот случай можно проиллюстрировать примером. Пусть

$C1 = \neg A \vee Q, C2 = A.$

Ясно, что Q - резольвента для C1 и C2. Пусть μ(A)=0.3 и

μ (Q)=O.2. Имеем

μ (C1 ^C2)= μ (($\neg A \vee Q$)^A)=min[max(μ(-A), μ (Q), μ (A)]= =min[max(0.7,0.2),0.3]=0.3, т.е. μ(Q)< μ(C1^ C2).

Далее мы будем рассматривать случай μ (A)> μ (-A). В частности, если значение истинности A равно 1 (строго истина) или O (строго ложь), то степень достоверности резолюции равна 1. Но если значение истинности A равно 0.5 (неясно, истина или ложь), то степень достоверности резолюции равна 0. Таким образом, степень достоверности резолюции l>=cd>=0 (см. рис. 5.4)

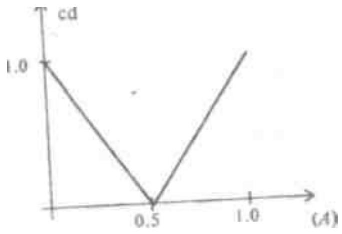

Рис. 5.4

Следующая теорема имеет такой же смысл, что и предыдущая, но в менее строгой формулировке (без требований ограничения сверху на значение истинности следствия, полученное повторным применением принципа резолюции). Доказательство можно найти в [26], [8], [57]. Заметим, что значение истинности множества μ(S) равно значению истинности самого ненадежного высказывания из S, т.е. наименьшему значению.

Теорема 3. *Пусть S - множество дизъюнктов и* $G \cup R^n(S)$. *Тогда для всех дизъюнктов G из* $R^n(S)$ $\mu(S) <= \mu(G)$.

Из теоремы следует, что значение истинности следствия не меньше нижнего граничного значения истинности аксиомы из S.

Теперь можно получить последовательность степеней достоверности резолюций cd1,cd2,...,cdn и степень достоверности полной резолюции справедливости выводимой теоремы равна наименьшей из степеней отдельных резолюций, т.е.

Cd^n = min(cd1,cd2,...,cdn) (5.77)

Пусть на n-м шаге вывода получен пустой дизъюнкт □. Если cd = 0, то об истинности следствия ничего сказать нельзя, так как μ(□)=0.5 (ни ложь, ни истина). Если cd=1, вывод следствия значим, т.е. μ(□)=1, или, иными словами, он является абсолютным противоречием. Если 0.5> μ(□)>0, имеем неполное, нечеткое противоречие.

Таким образом, процедура вывода теоремы из множества аксиом должна приводить к неполному опровержению принятых исходных положений вывода (в частности, отрицание выводимой теоремы), т.е. к неполному *reductio at absurdum*.

Обобщая сказанное, приведем последовательность нечеткого вывода теоремы с помощью нечеткого метода резолюции. Пусть S1 -множество аксиом и F - нечеткая формула, представляющая следствие из S1 аксиом (теорем). Представим отрицание F и S1 как множество S. Используя идею нечеткой резолюции, мы можем получить новое множество утверждений как логическое следствие исходных. При этом фиксируем степени достоверности резольвент cdi на каждом шаге резолюции как степень достоверности противоречия ключевого слова резольвенты этого шага. Если последующие формулы выводимы из аксиом, то в конечном счете мы можем получить пустой дизъюнкт. Факт получения пустого дизъюнкта в четкой логике означает, что необходимо признать абсурдность принятого предположения об отрицании выводимой формулы –F при исходных аксиомах S1.

В нечеткой логике получение пустого дизъюнкта требует оценки степени достоверности пустого дизъюнкта (или резольвенты последнего шага резолюции). Для оценки полной резолюции и принятия решения об абсурдности исходного предположения используется степень достоверности полной резолюции (5.77), которая показывает, насколько формула F является истинной и насколько выводимой. Если cd<0.5, то следует признать абсурдным принятое исходное утверждение -F его выводимость из S1.

Пример. Докажем, что формула F=A→C может быт выведена из аксиом A→B и B→C, где μ(A)=0.8, μ(B)=0 μ(C)=0.9.

Доказательство. Представим исходные аксиомы и выводимую формулу в дизъюнктивной форме:[redacted] $\neg A \vee B, \neg B \vee C, A, \neg F \equiv \neg A \vee C$. Теперь образуем множество S, учитывая, что выводимая формула F должна входить в это множество с отрицанием, т.е. $\neg F \equiv \neg A \vee C$. Тогда S={ $\neg A \vee B, \neg B \vee C, A, \neg C$ }. Таким образом, нам предстоит показать, что предположение о выводимости $\neg F$ из исходных аксиом абсурдно в условиях нечеткой логики.

Выпишем дизъюнкты S:

l.-AvB,
2.-BvC,
3. A,
4.-C.

Применив метод нечеткой резолюции получим следующие резольвенты:

5. B (из 1-3) с cd1=cd(A),
6. C (из 2-5) с cd2=cd(B),
7. □ (из 4-6) с cd3=cd(C),
где cdi вычисляется по (5.72):
cd1=cd(A)=max(μ (A), μ (-A))-min (μ (A), μ (-A))=
max(0.8,0.2)-min(0.8,0.2)=0.6,
cd2=cd(B)=max(μ (B), μ (-B))-min(μ (B), μ (-B))=
max(0.7,0.3)-min(0.7,0.3)=0.4,
cd3=cd(C)=max(μ (C), μ (-C)-min(μ (C), μ (-C))=
max(0.9,0.1)-min(0.9,0.1)=0.8.
Степень достоверности полной резолюции
cd=min(cd1, cd2, cd3)=min(cd(A), cd(B), cd(C)=min(0.6, 04, 08)=0.5.
Таким образом, следует принять решение, что формула F выводима из исходных аксиом.
Приведем еще один пример использования метода нечеткой резолюции применительно к предикатам первого порядка. Напомним, что утверждения должны быть приведены к нормальной форме. Кроме того, в процессе вывода используется процедура унификации переменных.
Пример 5.15. Если мужчина хочет жениться и женщина хочет выйти замуж:, то женитьба может состояться. Запишем эту фразу в форме предикатов первого порядка. Пусть предикат *женитьба*(X, Y) означает желание мужчины X жениться на женщине Y или желание женщины X выйти замуж за мужчину Y, предикат *свадьба*{X, У) - факт женитьбы при обоюдном согласии мужчины и женщины на женитьбу. Тогда приведенная аксиома запишется в следующей форме:
женитьба(X, У)^женитьба(Y,X)→ свадьба{X, Y).
Определим возможность женитьбы г-на А (желание жениться на г-же В оценивается достаточно скромно - 60%) и г-жи В (желание выйти замуж за А оценивается в 80%). Это значит, что значения истинности μ(*женитьба*(A,B))=0.6 и μ*(женитьба*(B,A)) =0.8. Теперь имеем два факта и одно правило:
1. *женитьба*(A ,B)
2. *женитьба*(B,A)
3. *женитьба*(X, У)^*женитъба(* Y,X)→*свадьба*(X, Y). Мы хотим из приведенных аксиом вывести следствие
5. *свадьб*а(A,B) со значением истинности μ (*свадьба*(A ,B))=1. Представим 3 в дизъюнктивной нормальной форме:
Ш женитьба(X, Y) Ƅ Ш *женитьба*(У,X)∨*свадьба*(X, Y).
Кроме того, необходимо выводимое следствие (доказываемую теорему) взять со знаком отрицания. Теперь мы имеем множество S дизъюнктов:
S= {женитьба(A,B),женитьба(B,A),-женитьба(X,Y)v-женитьба(Y,X)vсвадьба(X,Y),-свадьба(A ,B)}.
При получении резольвент переменные X и Y сопоставляются с соответствующими значениями А к В. Для резольвент имеем следующие степени достоверности:
cd1=*cd(женитьба(*A,B))=0.2, cd2=cd(женитьба(B,A))=0.6,
cd3=cd(свадьба(A ,B))= 1
и степень достоверности полной резолюции cd=0.2. Следовательно, утверждение *свадьба*(A,B) истинно с реалистичным значением истинности из [0.6,0.8], хотя предположили равной 1.
Две следующие леммы являются фундаментальными в решении вопроса о выводимости в нечеткой логике полноте принципа
резолюции.
Лемма 3 [57]. *Множество S невыполнимо в нечеткой логике, если и только если оно невыполнимо в четкой логике.*
Лемма 5. *Множество S невыполнимо в четкой логике, если и только если из нее может быть выведен пустой дизъюнкт.*
Теорема 5. *Множество S нечетких дизъюнктов невыполнимо в нечеткой логике, если и только если из S может быть выведен пустой дизъюнкт со степенью достоверности резольвенты cd<>0.*
Доказательство. Допустим, что S - невыполнимо. Тогда оно невыполнимо в двоичной логике (лемма 2). Кроме того, в соответствии с леммой 3 из S может выводиться пустой дизъюнкт □. В этом случае, в соответствии с (5.72) и данным ранее пояснением относительно значения истинности пустого дизъюнкта всегда имеем cd<>0 и μ(□)<0.5, так как значение cd=0 соответствует μ(□)=0,5 (ни ложь, ни истина), т.е. бессмысленности вывода резолюции.
Теперь предположим, что в результате вывода получены cd<>= и пустой дизъюнкт □, и

множество S выполнимо в нечеткой логике. Тогда μ (S)>=0.5> μ(□). Очевидно, это невозможно, так как по теореме 3 мы имеем 0.5> μ(□)=0,5 >= μ(S).
А это означает, что S не выполняется. Ч.т.д.
В заключение этого раздела отметим, что приведенный принцип резолюции является основой вывода в нечетком Прологе, позволяющем создавать качественно новые экспертные системы, решать другие важные задачи искусственного интеллекта, где не приемлемы двузначные ответы, особенно в условиях недостаточности знаний или информации.